Treinamento Intensivo de

Fundamentos Matemáticos

FATEC ITAQUERA Professor Miguel Reale

Programa de Monitoria Janeiro de 2015

Coordenação de Monitoria

18 de janeiro de 2015

Sumário

Capítulo 1

Número Inteiros (Z)

Os números negativos sempre aparecem com o símbolo (-) e os positivos aparecem sem símbolo ou com o símbolo (+) e o número zero nem é positivo nem negativo.

Os números negativos geralmente são associados a temperaturas frias, aos andares abaixo do térreo e ao saldo devedor de um correntista.

1.1 Subtração e os números negativos

Os números negativos aparecem quando subtraímos um número maior de um menor, isto é $40 - 120 = -80$. Exemplo:

1. $38 - 14 = 24$

2. $92 - 103 = -9$

3. $574 - 224 = 350$

Efetue as operações abaixo:

1. $386 - 149$

2. $926 - 1036$

3. $5274 - 2274$

4. $777 - 819$

5. $74 - 2001$

1.2 Representação Geométrica

A representação geométrica dos números inteiros é uma reta, com espaçamentos unitários, onde os números negativos ficam à esquerda do zero e os positivos à sua direita, como na figura 1.1:

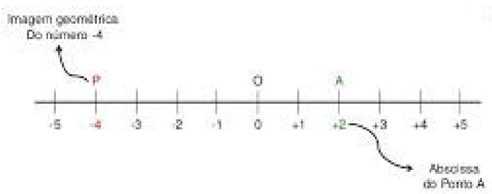


Figura 1.1: Reta dos Números Inteiros

No intervalo entre dois números quaisquer existem outros infinitos números, formando o conjunto dos números reais. Uma característica dos números inteiros é sempre conseguirmos o sucessor ou antecessor para qualquer número inteiro dado. Assim a representação não termina no -2 ou no 3, isto é, existe o sucessor de 3, que é o 4 e o antecessor de -2, que é o -3.

Exemplo Construa uma reta com os primeiros 7 números positivos e os primeiros 4 números negativos.

1.3 Comparação de números inteiros

Podemos comparar dois números inteiros para saber se um deles é maior que o outro. Para fazer esta comparação podemos utilizar a representação geométrica dos números inteiros com analogia ao saldo bancário. Na representação geométrica, quanto mais à esquerda está o número, menor ele é. Por outro lado, quanto mais à direita está o número, maior ele é. Assim

$$-3 < 0, \quad 4 > 2, \quad 1 > 0, \quad 1 > -1$$

Exemplo Distribua os números acima na reta do conjunto **Z**

Exemplo Compare os números abaixo:

1. -4 e -2

2. 2 e 3

3. -21 e 18

4. 30 e 27

5. -16 e -4

1.4 Operações com números inteiros

1.4.1 Adição de números Inteiros

Para somar números inteiros podemos usar várias estratégias. Veja os exemplos abaixo:

a) adição: -2 + 5 podemos pensar assim:

1. A temperatura estava -2°. Subiu 5°. Ficou em +3°.

2. O Corinthians sofreu 2 gols (-2) e marcou 5 gols (+ 5). Ficou com um saldo de 3 gols (+3).

3. Na reta de inteiros se eu sair do número -2 e andar 5 números para a direita (+5) eu chego ao número 3 (+3).

b) adição: -3 + -4 podemos pensar assim:

1. A temperatura estava -3^o . Baixou 4° (-4). Ficou em - 7^o.

2. O Vasco da Gama sofreu 3 gols (-3) e tomou 4 gols em outra partida(-4). Ficou com um saldo de -7 gols.

3. Na reta de inteiros se eu sair do número -3 e andar 4 números para a esquerda eu chego ao número -7.

Exemplo Efetue as adições e dê uma situação real que ilustra as operações:

1. $-386 + 500$

2. $-329 + (-94)$

3. $0 + (-185)$

4. $-87 + (-87)$

1.4.2 Adição e Subtração

O resultado das operações da adição e subtração para os números inteiros sempre é um número inteiro, esta propriedade (de conjunto) é chamada de fechamento.

Exemplo 1 Calcule

$8 - 3–4–5–12 + 4–1–10 + 8–9–15 - 7$

A forma mais fácil de trabalharmos a adição e a subtração é separarmos os números positivos dos números negativos:

$(8 + 4 + 8) + (-3 - 4 - 5 - 12 - 1 - 10 - 9 - 15 - 7)$

A seguir obtemos a soma dos positivos e a soma dos negativos: $20 + (-66)$

O resultado obtido será: -46.

Exemplo 2 Calcule

$15–\{10–[8 + 7–19 - (-1 + 2 + 8–11)]\}$.

Os sinais $\{\}, [], ()$ determinam a prioridade das operações

Lembre se das seguintes regras:

1. Elimine primeiro os parênteses, depois colchetes e por fim as chaves

2. Se o sinal que estiver fora de qualquer um deles (parênteses, colchete, chave) for negativo deveremos trocar todos os sinais dos números que se seguirem, porém se o sinal de fora for positivo, deveremos manter o sinal dos números que se seguirem.

Primeiramente copiamos a expressão até os parênteses, chegando nele trocamos todos os sinais dos números já que fora dele temos um sinal negativo

$15–\{10–[8+7–19+1–2–8+11]\}$ **os parenteses foram eliminados**

A seguir eliminaremos o colchete, utilizando o mesmo raciocínio

$15–\{10–8–7 + 19–1 + 2 + 8–11\}$ **os colchetes foram eliminados**

e por fim eliminamos a chave:

$15–10 + 8 + 7–19 + 1–2–8 + 11$,

agindo da mesma forma que no exemplo anterior chegamos a

$\underbrace{15 + 8 + 7 + 1 + 11} + \underbrace{-10–19–2–8}$,

resultando em $42 + (-39) = 3$

1.4.3 Exercícios

1. Efetuar as operações. Represente na reta os números em cada uma das etapas:

2. 10–9–7–8 + 12–3–7 + 8–31 + 7 + 20 **R:-8**

3. –22–6 + 8 + 12 + 10–45–27 + 33 **R:-37**

4. 12–(10–9–8–4) + 15 **R:38**

5. –23–10–[9–17 + (8–9–7)–1] **R:-50**

6. 16 + 23 − 12–[8 + 4 + 7–(5–3–9) + 13] + 12 **R: 0**

7. 34 + 12–10–8–9–[21–9–8–(23–9–10)] **R:37**

8. 90–[11–7–(5 + 14–34)–14–8] **R:93**

9. 45–87–12–12–56–10–[12–24–45 + (45–32–54) + 9 + 18] **R:-61**

1.5 Multiplicação

O conjunto dos números inteiros é fechado para a operação da multiplicação. A multiplicação de números inteiros gera números inteiros

Exemplo 1

$(-1)\cdot(-2)\cdot(+3)\cdot(-2)$

Regra de sinais para o produto

Se tivermos um número ímpar de sinais negativos o produto resultará negativo.

Se tivermos um número par de sinais negativos o produto será positivo.

$$\begin{array}{c|c|c|} & + & - \\ \hline + & + & - \\ \hline - & - & + \\ \hline \end{array} \tag{1.1}$$

No exemplo acima temos um número ímpar de sinais negativos (três), portanto o produto será negativo - 12

Exemplo 2 Calcule os produtos:

1. $(+12).(-2).(-3).(-10)$ R: - 720

2. $(-2).(-12).(-5).(-8)$ R: 960

3. $(-1).(-2).(-3).(-4).(-5)$ R: -120

1.6 Divisão

O conjunto dos números inteiros **NÃO** é fechado para a operação de divisão.

A divisão de números inteiros **NÃO** gera números inteiros **SEMPRE** .

Os resultados nesse caso podem ser representados na reta dos números inteiros no intervalo entre dois números inteiros

1.7 Potenciação

A operação de Potenciação é um recurso de linguagem que facilita a escrita de produtos de termos repetidos:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \tag{1.2}$$

Na expressão pode se contar 9 vezes o número 2, para facilitar a escrita adota-se

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 \tag{1.3}$$

De forma geral

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n \tag{1.4}$$

a é a base na Potenciação e indica o número que foi repetido

n é o expoente na Potenciação e indica o número de repetições

Exemplo Represente o produto indicado

$2^2 =$ __________ ,diz se dois ao quadrado

$2^3 =$ __________ , diz se dois ao cubo

$2^4 =$ __________ , diz se dois elevado a quarta potência

$2^{10} =$ __________ , diz se dois elevado a décima potência

1.8 Radiciação

Observe que : $2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^{10} = 1024$

Poderíamos estar interessados na situação contrária. Qual o número elevado a quarta potência que resulta em 81?

Essa é a operação de Radiciação e é o inverso da Potenciação. Matematicamente:

$$\sqrt[4]{81} \tag{1.5}$$

Pensando um pouco temos que $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Assim a resposta é 3. Matematicamente

$$\sqrt[4]{81} = 3 \tag{1.6}$$

Perceba que:

$$\sqrt[2]{81} = 9 \tag{1.7}$$

No início é mais fácil pensar na Potenciação para resolver problemas de Radiciação. Depois a memorização torna o processo natural.

De forma geral

$$\sqrt[n]{a} = q \tag{1.8}$$

Diz se raiz n-ésima de a é igual a q. E estamos procurando qual o número q que multiplicado repetidamente n vezes resulta em a.

1.8.1 Expressões Numéricas

Nas operações em uma expressão numérica, devemos obedecer a seguinte ordem:

1. Potenciação ou Radiciação
2. Multiplicação ou Divisão
3. Adição ou Subtração

Observações:

- Antes de cada uma das três operações citadas anteriormente, deve se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves.
- A multiplicação pode ser indicada por x ou por um ponto. ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
&133 - [(35+8) - (12-3)] - \{(17+4) - [15 - (11-9)]\} \\
&\qquad 133 - [43 - 9] - \{21 - [15 - 2]\} = 133 - 34 - \{21 - 13\} \\
&\qquad = 133 - 34 - 8 \\
&\qquad = 133 - 42 \\
&\qquad = 91
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Seguindo-se a ordem rigidamente (repetindo): Primeiro divisões e multiplicações, depois, adição e subtração. A operação que vier primeiro. Vai resolvendo o que estiver dentro e repetindo o que não estiver sendo operado. Cada um na sua vez.

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
&-8 - [+2 - 1 + (-50 + 28)] = \\
&= -8 - [+2 - 1 + (-22)] \\
&= -8 - [+2 - 1 - 22] \\
&= -8 - [+2 - 23] \\
&= -8 - [-21] \\
&= -8 + 21 \\
&= 13
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Exemplo 3

$$
133 - [(35+8)^2 - (12-3)]^3 - \{\sqrt{(17+8)} - [15 - (11-9)]\}^2
\tag{1.11}
$$

Exemplo 4

$$133 - [\sqrt{(35+14)} - \sqrt{(12-3)}]^2 - \{\sqrt{(17+8)} - [15 - (11-9)^2 + (\sqrt{16} + 4]^2\}^2 \tag{1.12}$$

1.9 Números Compostos e Primos

Um número inteiro maior que 1 é um número primo se tem dois e só dois divisores, a unidade e o próprio número.

Exemplo $13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1$

Um número composto é um número que tem mais do que dois divisores naturais distintos.

Exemplo $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$

Na Grécia Antiga, Eratóstenes estabeleceu os números primos para os 100 primeiros números, conforme figura 1.9:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1.2: Crivo de Eratóstenes

O número 1 não é primo, só tem um divisor, o próprio 1.

O número 1 também não é composto.

Todo o número composto pode ser escrito como um produto de fatores primos .

Por exemplo:

1. $8 = 2^3$

2. $36 = 2^2 \cdot 3^2$

3. $595 = 5 \cdot 7 \cdot$ _____

1.9.1 Decomposição por fatores primos

A forma usual para obter a decomposição consiste na aplicação da Regra do Traço.

Por exemplo: Para o número 210, aplica se o processo de divisão sucessiva por todos os números primos a partir de 2, ou seja $2, 3, , 5, 7, 11, 13, \cdot$

$$\text{Quocientes} \left\{ \begin{array}{c|c} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \right\} \text{Primos divisores sucessivos} \tag{1.13}$$

Portanto $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Complete a decomposição

$$\left\{ \begin{array}{c|c} & 2 \\ 4410 & 2 \\ & \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \right\} \tag{1.14}$$

Portanto

1.10 Exercícios

1. Calcule as exressões:

   (a) $7 - (10 + 5) + 5 \cdot (7 - 3)$ **R.: 12**

(b) $4 + 5 \cdot 8 - 3 \cdot 11 + 5$ **R.: 16**

(c) $-8 + 5 \cdot (-1 + 3) - 7$ **R.: –5**

(d) $2 - (-2 - 5) - 2 \cdot (-5 + 2)$ **R.: 15**

(e) $-3 \cdot -3 - 2 \cdot [-5–3 \cdot (-1 + 3)] - 5 - 7$ **R.: –49**

(f) $-5 - 2 \cdot -3 - 2 \cdot [-4 - 2(-6 + 10) \cdot (-3 + 1)] + 7$ **R.: 35**

(g) $(-1 + 5) \cdot (5 - 1) - 2 \cdot [-3 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 6) - 4]$ **R.: –30**

(h) $7 - 6 - (-17 - 6) + 3 \cdot [3 + 4 \cdot (-2 + 3 \cdot 2) - 4]$ **R.: 51**

(i) $4 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 + 11$ **R.: –30**

2. Calcule as expressões

(a) $7 - ((10 + 5) + (5 \cdot (7 - 3))^3)2$

(b) $4 + (5 \cdot 8 - 3 \cdot 11)^2 + 5$

(c) $-8 + 5 \cdot ((-1 + 3) - 7)^4$

(d) $2 - ((-2 - 5) - 2 \cdot (-5 + 2))^3$

(e) $-3 \cdot \{-3 - 2 \cdot [-5 - 3 \cdot (-1 + 3)]\}^3 - (5 - 7)$

(f) $-5 - 2 \cdot \{-3 - 2 \cdot [-4 - 2(-6 + 10) \cdot (-3 + 1)] + 7\}^2$

(g) $\sqrt{(-1 + 5)} \cdot (5 - 1)^2 - 2 \cdot [-3 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 6) - 4]$

(h) $7 - 6 - (-17 - 6) + 3 \cdot [3 + (4 \cdot (-2 + 3 \cdot 2))^3 - 4]$

(i) $4 + (3 \cdot 2 - 6 \cdot 7)^2 + 3 \cdot 5 + 4(\cdot(-2) - 8 \cdot 2 + 11)^3$

3. Decomponha em números primos

(a) 147

(b) 525

(c) 504

(d) 187

(e) 1155

(f) 3969

(g) 2310

(h) 1008

(i) 756

(j) 5040

Capítulo 2

Números Racionais Q

Lembre se que a única operação que não possui fechamento nos números inteiros é a divisão. Ou seja para

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \tag{2.1}$$

não ha representação do resultado dessa operação no conjunto dos Números Inteiros.

Lembre se também que na representação da reta dos inteiros há intervalos não ocupados entre dois números inteiros.

Todo número racional, escrito na forma de razão entre dois inteiros quaisquer a e b, é denominado um número racional ou simplesmente uma fração.

$$a : b = \frac{a}{b} \tag{2.2}$$

É necessário reforçar o conceito que toda fração pode ser representada como a divisão entre o número a e o número b. Por exemplo:

1. $3 : 4 = \frac{3}{4}$
2. $7 : 5 = \frac{7}{5}$
3. $8 : 2 = \frac{8}{2}$ e nesse caso já sabemos que o resultado é 4.

A fração é sempre representada por dois números:

- a é o numerador, o número de partes consideradas de um objeto
- b o denominador, o número total de partes do objeto

Por exemplo, na fração $\frac{1}{4}$ (um quarto), o número 1 é o numerador e número 4 é o denominador. Veja na figura 2.1 algumas outras representações.

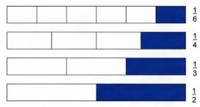


Figura 2.1: Representando uma fração

Muitos alunos *apresentam grande dificuldade em aprender e trabalhar com as frações* , pois:

1. Não reconhecem se $\frac{1}{4}$ é maior ou menor que $\frac{1}{5}$.

2. Cometem erros do tipo $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$

Observações Importantes

1. Todo número inteiro também é um número racional, logo Z é um subconjunto de Q. Por exemplo:
$$3 = \frac{12}{4}$$
Graficamente representado na figura 2.2

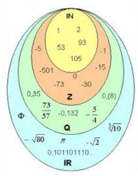


Figura 2.2: Conjuntos

2. Cada número racional pode ser representado por infinitas frações equivalentes. Por exemplo
$$\frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \cdots = \frac{75}{25}$$

3. Se o numerador for múltiplo do denominador a fração será um racional inteiro. Por exemplo, $\dfrac{15}{3} = 5$, pois 15 é múltiplo de 3. Caso contrário, a fração será um racional fracionário.

4. Todo número racional pode ser representado por um número decimal exato ou por uma dízima periódica. Por exemplo, $\dfrac{5}{2} = 2,5$ ou $\dfrac{1}{3} = 0,3333$

5. Tipos de frações

   (a) **Fração Própria** Quando o numerador for **menor** que o denominador, ou seja, $a < b$, com $a > 0$ e $b > 0$.

   (b) **Fração Imprópria** Quando o numerador for **maior** que o denominador, ou seja, $a > b$, com $a > 0$ e $b > 0$.

   Todas as frações próprias $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}$ são menores que 1 e todas frações impróprias $\frac{8}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ são maiores que 1

Os nomes das frações dependem do número de partes em que a unidade é dividida, denominador, e do número de partes que consideradas, numerador. Veja a figura 2.3.

Figura 2.3: Nomes das frações

As frações com denominadores múltiplos de 10 recebem o nome de fração decimal. Por exemplo,

$$\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{13}{10}$$

A fração com outros denominadores, recebe o nome de avos, que em latim tinha o significado de parte ou quota. Por exemplo, $\frac{4}{9}$, quatro nove avos, $\frac{5}{128}$ cinco cento e vinte e oito avos, etc. Observe figura 2.4

2.1 Frações Equivalentes

Frações equivalentes são representações distintas da mesma quantidade. "Equi"indica igualdade, "Valente"significa "que tem valor". Observe as figuras 2.5 e 2.6

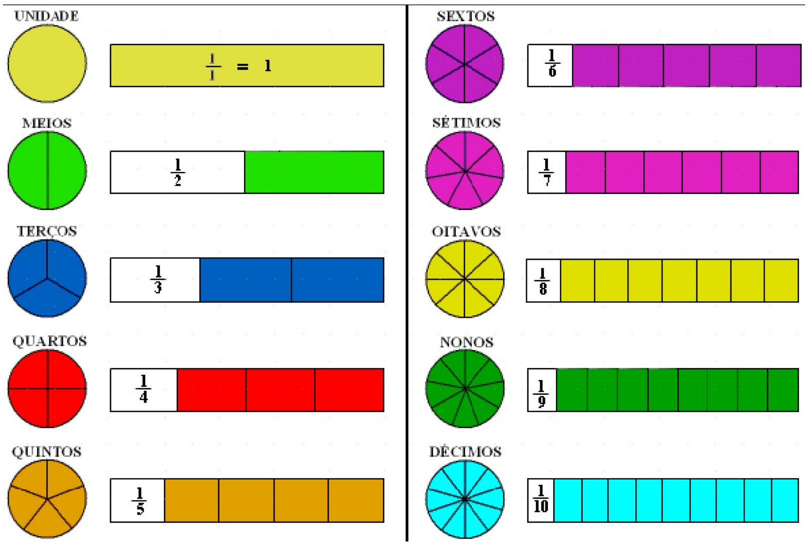


Figura 2.4: Nomes das frações

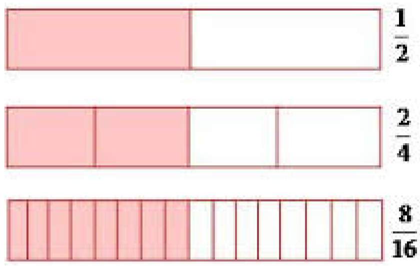


Figura 2.5: Frações Equivalentes

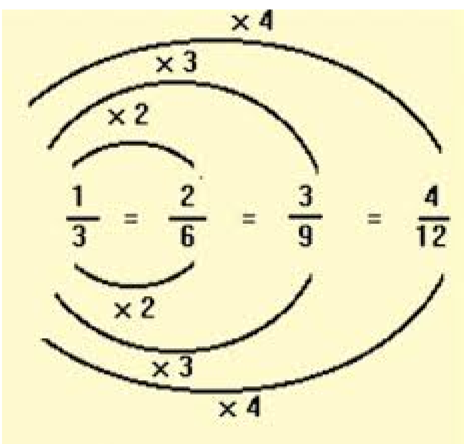


Figura 2.6: Frações Equivalentes, representação numérica

2.1.1 Simplificação de frações

A forma mais simples é representada pela fração de números primos entre si. Normalmente o objetivo é estabelecer essa expressão Para podemos estabelecer o seguinte processo, ver figura 2.7:

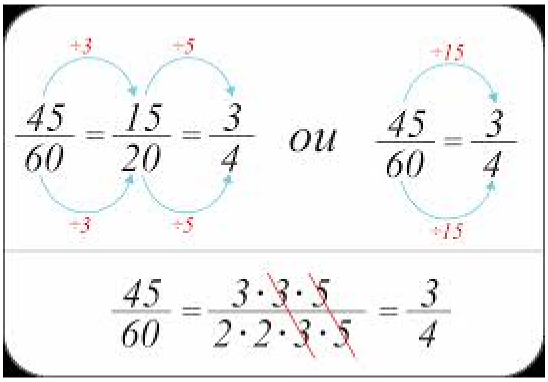


Figura 2.7: Simplificação de Frações Equivalentes

Quando fazemos isto, dizemos que a fração foi simplificada e também $\frac{45}{60}$ é equivalnte a $\frac{3}{4}$

Perceba que o processo é de ida e volta. E poderíamos ter feito ao contrário

2.2 Exercícios

1. Simplificar as seguintes frações:

   (a) $\frac{25}{10}$
   (b) $\frac{12}{36}$
   (c) $\frac{72}{144}$
   (d) $\frac{21}{3}$
   (e) $\frac{-16}{128}$
   (f) $\frac{75}{-15}$
   (g) $\frac{-8}{-480}$
   (h) $\frac{32}{512}$
   (i) $\frac{27}{243}$
   (j) $\frac{15}{25}$
   (k) $\frac{9}{11}$

2. Reduzir ao mesmo denominador comum:

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$
   (b) $\frac{4}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{6}$

(c) $3, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}$

(d) $\frac{4}{3}, \frac{11}{5}, \frac{5}{7}$

(e) $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}$

(f) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$

(g) $\frac{3}{11}, \frac{2}{13}, \frac{5}{26}$

(h) $\frac{3}{7}, \frac{5}{4}, \frac{7}{11}$

3. Refaça o exercício 2 colocando as frações em ordem crescente

2.3 Adição ou Subtração

A idéia de juntar corresponde, na Matemática, à adição. Podemos então somar frações representando-as em figuras e juntando as partes indicadas. Observe a adição, na figura 2.8:

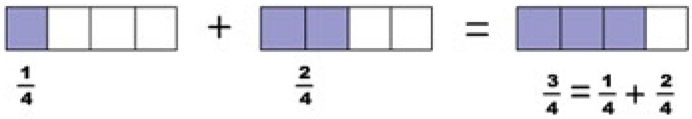


Figura 2.8: Adição de Frações de Denominadores Iguais

Este exemplo justifica a regra utilizada para somar frações:

Para somar ou subtrair frações de mesmo denominador, somamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

No entanto, quando as frações têm denominadores diferentes, aparece uma dificuldade. Como somar $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$? Observe a figura 2.9, as partes são diferentes.

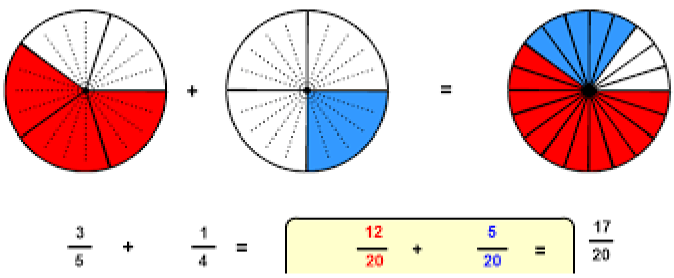


Figura 2.9: Adição de Frações de Denominadores Diferentes

A soluçao aparece do caso anterior, quando os denominadores eram iguais. Assim o primeiro passo é "reduzir as frações ao mesmo denominador".

Depois que as frações estão com o mesmo denominador, efetuamos a adição:

Para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes

1. Reduzimos as frações ao mesmo denominador e aplicamos a regra anterior.

2. Para reduzirmos as frações ao mesmo denominador, podemos tirar o MMC entre os denominadores e efetuarmos de modo mais rápido a soma ou subtração entre as frações.

Exemplo Calcular $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + \frac{1}{4} &= \frac{12}{20} + \frac{5}{20} \\ &= \frac{12+5}{20} \\ &= \frac{17}{20} \end{aligned} \tag{2.3}$$

A subtração se faz da mesma forma, conforme representação da figura 2.10

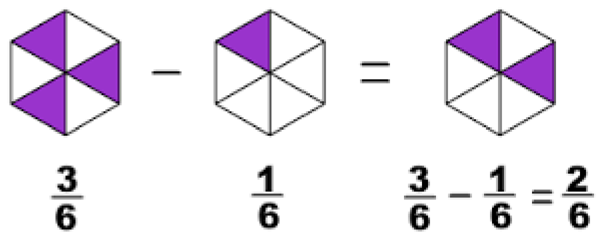


Figura 2.10: Subtração de Frações de Denominadores Diferentes

2.3.1 Exercícios

1. Efetuar

(a) $\frac{2}{7} + \frac{2}{3}$

(b) $\frac{2}{5} + \frac{-1}{3}$

(c) $\frac{7}{2} + \frac{4}{4}$

(d) $\frac{-1}{5} + \frac{8}{3} + \frac{-3}{4}$

(e) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 4$

(f) $\frac{4}{9} - \frac{7}{12} + 3$

(g) $\frac{2}{14} + \frac{4}{21}$

(h) $\frac{-7}{10} + \frac{4}{15}$

(i) $\frac{9}{7} + \frac{4}{9}$

(j) $\frac{3}{5} + \frac{11}{7}$

(k) $\frac{2}{9} + \frac{3}{8}$

(l) $\frac{4}{7} + \frac{-7}{11}$

(m) $\frac{2}{7} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{-1}{3}$

(n) $\frac{7}{2} + \frac{4}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{8}{3} + \frac{-3}{4}$

(o) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 4 - \frac{4}{9} - \frac{7}{12}$

(p) $\frac{2}{14} - \frac{4}{21} - \frac{-7}{10} + \frac{4}{15}$

2.4 Multiplicação

A fração de uma fração pode ser calculada pelo descrição geométrica na figura 2.11

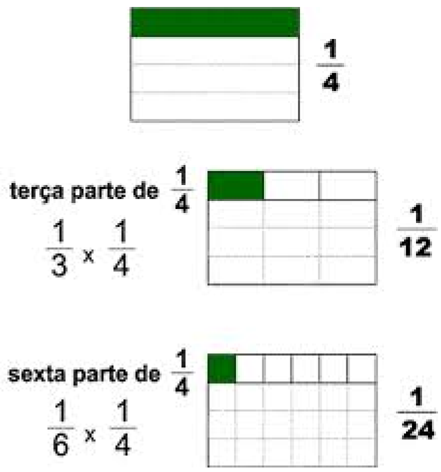


Figura 2.11: Subtração de Frações de Denominadores Diferentes

De forma geral

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2.4}$$

Para multiplicarmos duas frações , multiplicamos os numeradores e os denominadores entre si.

Por exemplo:

1. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{21}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{}{}$

3. $\frac{7}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{28}{63} = \frac{}{}$

2.5 Divisão

Para dividirmos duas fraçõee, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração.

De forma geral

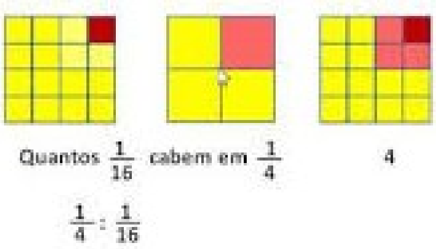


Figura 2.12: Subtração de Frações de Denominadores Diferentes

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b} \times \frac{q}{p} = \frac{aq}{bp} \tag{2.5}$$

Por exemplo:

1. $\frac{4}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{15}$

2. $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = $ ———

3. $\frac{7}{3} : \frac{4}{21} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{21}} = \frac{7}{3} \times \frac{21}{4} = $ ———

4. $\frac{1}{3} : \frac{4}{7} + \frac{3}{8} =$

5. $\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5} : \frac{7}{9}\right) + \frac{4}{7} =$

2.5.1 Exercícios

1. Efetuar

(a) $\frac{2}{7} \times \frac{2}{3}$

(b) $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{3}$

(c) $\frac{7}{2} : \frac{4}{4}$

(d) $\frac{-1}{5} : \frac{8}{3} + \frac{-3}{4}$

(e) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$

(f) $\frac{4}{9} : \frac{7}{12}$

(g) $\frac{2}{14} \times \frac{4}{21}$

(h) $\frac{-7}{10} : \frac{4}{15}$

(i) $\frac{9}{7} : \frac{4}{9}$

(j) $\frac{3}{5} \times \frac{11}{7}$

(k) $\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}$

(l) $\frac{4}{7} : \frac{-7}{11}$

(m) $\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{-1}{3}$

(n) $\left(\frac{7}{2} : \frac{4}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{5} : \frac{8}{3}\right) + \frac{3}{4}$

(o) $\left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{4}{9} : \frac{7}{12}\right)$

(p) $\frac{2}{14} - \left(\left(\frac{4}{21} \times \frac{-7}{10}\right) : \frac{4}{15}\right)$

(q) $\left(\frac{7}{2} : \frac{4}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{5} : \frac{8}{3}\right) + \frac{3}{4}$

(r) $\left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{4}{9} : \frac{7}{12}\right)$

(s) $\frac{2}{14} - \left(\left(\frac{4}{21} \times \frac{-7}{10}\right) : \frac{4}{15}\right)$

(t) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{3}$

(u) $\frac{2}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{-1}{3}\right) - \frac{5}{6}$

(v) $\frac{2}{11} - \frac{3}{22} \cdot \left(\frac{7}{2} + \frac{4}{4}\right)$

(w) $\frac{5}{7} - \frac{1}{42} \times \left(\frac{-1}{5} + \frac{8}{3} : \frac{-3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{4}{15} + \frac{5}{3}\right)$

(y) $\frac{3}{4} - \frac{7}{15} - \frac{3}{3} + \frac{11}{6}$

(z) $\frac{25}{10} + \left(\frac{2}{5} + \frac{-1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \frac{12}{36} - \frac{72}{144}$

2. Efetuar as operações:

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

(b) $\frac{2}{6} - \frac{5}{6}$

(c) $\frac{2}{11} - \frac{3}{22}$

(d) $\frac{5}{7} - \frac{1}{42}$

(e) $\frac{1}{5} - \frac{5}{6} - \frac{4}{15} + \frac{5}{3}$

(f) $\frac{3}{4} - \frac{7}{15} - \frac{3}{3} + \frac{11}{6}$

(g) $\frac{25}{10} : \frac{12}{36} - \frac{72}{144}$

(h) $\frac{21}{3} : \left(1 + \frac{-16}{128}\right)$

(i) $\left(\frac{75}{-15} + 1\right) : \frac{-8}{-480}$

(j) $\frac{32}{512} - \left(2 - \frac{27}{243} \times \frac{15}{25}\right)$

(k) $\left(\frac{9}{11} : \frac{13}{36}\right) \times \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)$

(l) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right)$

(m) $\left(\frac{4}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6}\right)$

(n) $\left(3 + \frac{5}{4}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{9}$

(o) $\left(\frac{4}{3} \times \frac{11}{5}\right) : \frac{5}{7}$

(p) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{3}{7}$

(q) $-\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7}$

(r) $\frac{3}{11} : \frac{2}{13} - \frac{5}{26}$

(s) $\frac{3}{7} : \frac{5}{4} - \frac{7}{11}$

(t) $\frac{2}{14} \times \frac{4}{21}$

(u) $\frac{-7}{10} : \frac{4}{15}$

(v) $\frac{9}{7} : \frac{4}{9}$

(w) $\frac{3}{5} \times \frac{11}{7}$

(x) $\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}$

(y) $\frac{4}{7} : \frac{-7}{11}$

(z) $\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{-1}{3}$

Capítulo 3

Potenciação

3.1 Potenciação de números inteiros

Operação matemática envolvendo dois números:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n} = b \tag{3.1}$$

a base, indica o número repetido numa multiplicação

n o expoente n, indica a quantidade de vezes que a base a se repete na multiplicação

b potência, o resultado da operação

Exemplo

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
2. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$
3. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
4. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}$

Cuidado com os sinais.

Número negativo elevado a expoente par fica positivo. $(-7)^4 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) =$

Número negativo elevado a expoente ímpar permanece negativo $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) =$

Exemplos

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

2. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

3. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) =$

4. $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$

Situações especiais Alguns resultados em que é necessário ter atenção para a sua aplicação, principalmente com relação ao sinais das operações

1. $a^0 = 1$

2. $n^1 = n$

3. $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdots 0}_{n} = 0$

4. $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n} = 1$

5. $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

6. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

7. $-3^5 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -243$

8. $(-a)^5 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) =$

9. $-a^5 = -(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) =$

3.2 Propriedades Operatórias da Potenciação

As seguintes propriedades podem ser utilizadas para efetuação de cálculos:

$$\begin{aligned}
&\text{P1} \quad a^m \cdot a^n &&= \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{m} \cdot \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n} = a^{m+n} \\
&\text{P2} \quad \frac{a^m}{a^n} &&= \frac{\overbrace{a \times a \times a \cdots \times a}^{m}}{\underbrace{a \times a \cdots \times a}_{n}} = a^{m-n} \\
&\text{P3} \quad (a^m)^n &&= \underbrace{(a^m) \times (a^m) \cdots \times (a^m)}_{n} = a^{(m \cdot n)} \\
&\text{P4} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n &&= \frac{a^n}{b^n} \\
&\text{P5} \quad (a \cdot b)^n &&= a^n \cdot b^n \\
&\text{P6} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &&= \left(\frac{b}{a}\right)^n \\
&\text{P7} \quad a^{-n} &&= \left(\frac{1}{a}\right)^n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Todas as propriedades são válidas nos dois sentidos

Exemplos

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

   (a) $2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2} = 2^{3+5} =$

   (b) $2^x \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{x} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{x+3} =$

   (c) $2^{18} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{11} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{7} = 2^{11} \cdot 2^7 =$

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

   (a) $\dfrac{2^3}{2^2} = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3}}{\underbrace{2 \cdot 2}_{2}} = 2^{3-2} =$

(b) $\dfrac{2^x}{2^3} = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{x}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}} = 2^{x-2} =$

(c) $2^{18} = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{11}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}} = \dfrac{2^{11}}{2^7} =$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(a) $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3 \cdot 5} =$

(b) $(2^x)^3 = 2^x \cdot 2^x \cdot 2^x = 2^{x \cdot 3} =$

(c) $(2^3)^x = \underbrace{2^3 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^3}_{x} = 2^{x \cdot 3} =$

(d) $\left(2^{18}\right)^3 = \left(2^{18}\right) \cdot \left(2^{18}\right) \cdot \left(2^{18}\right) = \left(2^{18 \cdot 3}\right) =$

Quando o número 10 for elevado a qualquer potência positiva bastará repetir em zeros a quantidade equivalente ao expoente.

Ex: $10^4 = \underbrace{1000}_{\text{4 zeros}}$

Quando o número 10 for elevado a qualquer potência negativa bastará repetir em zeros a quantidade equivalente ao expoente colocando-os à esquerda do número 1, sendo que depois do primeiro zero haverá uma vírgula.

Ex: $10^{-4} = \underbrace{0,0001}_{\text{4 zeros}}$

No caso de expoentes iguais, vale ainda operar com as bases, e fazer a potenciação por último.

Ex: $2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2 = 10^2$

$10^2 : 5^2 = (10 : 5)^2 = 2^2$

Não existem regras para somar ou subtrair potências.

Devemos resolvê-las separadamente para depois somar ou subtrair.

3.3 Notação Científica

Quando colocamos um número em notação científica, tem-se a vantagem de trabalhar com número muito grandes ou muito pequenos mais facilmente.

A notação científica tem a forma:

$$N \cdot 10^x \tag{3.3}$$

Onde $1 < N < 10$ e x é o expoente de 10. Com os números nessa forma, podemos operar com eles:

1. $(N \times 10^x)(M \times 10^y) = (N \times M) \times 10^{x+y}$
2. $N10^x : M \times 10y = \dfrac{N}{M} \times 10^{x-y}$
3. $(N \times 10^x) + (M \times 10^x) = (N + M) \times 10^x$
4. $(N \times 10^y) - (M \times 10^y) = (N - M) \times 10^y$

Nos casos de adição e subtração, devemos ter os expoentes iguais para poder fazer a operação.

Deve-se transformar o expoente antes de começá-la. Para transformar o expoente devemos lembrar:

O número a ser transformado for maior que um, a vírgula "andara"para a esquerda, e o expoente será positivo. Ou seja, em um número grande o expoente aumenta.

O número a ser transformado for menos que um, a vírgula "andara"para a direita e o expoente será negativo. Ou seja, em um número pequeno o expoente diminui.

Simplifique a expressão: $\dfrac{2^n \cdot 4}{\sqrt[3]{8} \cdot 2^{3n+1}}$

Como temos multiplicação e divisão de potências de bases diferentes, devemos reduzir todas a mesma base. Como a menor base é 2, tentaremos escrever todos os números que aparecem na base 2.

$$\frac{2^n \cdot 2^2}{2 \cdot 2^{3n+1}}$$

Agora aplicaremos as propriedades de multiplicação de potências de mesma base.

$$\frac{2^{n+2}}{2^{1+3n+1}} = \frac{2^{n+2}}{2^{3n+2}}$$

Agora aplicaremos as propriedades de divisão de potências de mesma base.

$$2^{(n+2)-3n+2} = 2^{n+2-(3n+2)} = 2^{n+2-3n-2} = 2^{-2n}$$

3.4 Exercícios

1. Calcule as potências:

(a) $(-6)^2$

(b) $-(-6)^2$

(c) -6^2

(d) $(-2)^3$

(e) -2^3

(f) 5^0

(g) $(-8)^0$

(h) 0^{28}

(i) 1^{32}

(j) 13^2

(k) $(-1)^{20}$

(l) $(-1)^{17}$

(m) $((2^3)^3)^3$

(n) $((4^3-1)^3-2^4)^3$

(o) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(p) $\left(\frac{-4}{3}\right)^3$

(q) $\left(\frac{517}{643}\right)^0$

(r) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

(s) $\left(-\frac{2}{7}\right)^3$

(t) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(u) $\left(\frac{-4}{3}\right)^3$

(v) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3+\left(-\frac{2}{7}\right)^3$

(w) $\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{-4}{3}\right)^3$

(x) $\left(\frac{-4}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3$

2. Calcule o valor de

(a) $[4^7\cdot 4^{10}\cdot 4]^2\div(4^5)^7$

(b) $(a\cdot b)^3\cdot b\cdot(b\cdot c)^2$

(c) $\dfrac{x^3\cdot y^5\cdot x^{-1}\cdot y^3\cdot(x^3)^2}{\cdot y^{-2}\cdot x^4\cdot(x^2)^4}$

(d) $\dfrac{(z^3\cdot w^3+z^{-1})}{w^{-2}\cdot(z^4+(z^2)^4)}\cdot\dfrac{w^3+z^{-2}}{w^{-1}+\frac{1}{z^3}}$

3. Dado $a=2^7\cdot 3^8\cdot 7^2$ $b=2^5\cdot 3^6\cdot 7^0$ calcule

(a) $\dfrac{a}{b}$

(b) $a^3\cdot b^2$

(c) $\dfrac{a}{b^2}$

(d) $\dfrac{a^3}{b}$

(e) $a^2\cdot\dfrac{a}{\frac{a^3}{b^2}}$

(f) $(a^2+1)(b^2-1)$

(g) $a(a+b)-b(b-a)$

(h) $\dfrac{a^2-49}{b^2+25}$

4. Simplifique a expressão

(a) $\dfrac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{3}{2}}$

(b) $\dfrac{2^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}$

(c) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}}{2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(3^2+\frac{3}{2}\right)^3}$

(d) $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{2}{4}\right]\cdot\frac{2}{3}}{2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(3^2+\frac{3}{2}\right)^3}$

(e) $\dfrac{\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]^2-\frac{1}{4}}{\left[3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2-\frac{3}{2}}$

(f) $\dfrac{\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]^2-\frac{1}{4}}{\left[3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2-\frac{3}{2}}$

5. Calcule o valor numérico da expressão $a^2 - 2ab + b^2$ para

   (a) $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = \dfrac{3}{5}$

   (b) $a = \dfrac{-2}{7}$ e $b = -\dfrac{3}{2}$

   (c) $a = \dfrac{3}{5}$ e $b = \dfrac{5}{7}$

   (d) $a = \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)^2$ e $b = \left(1 - \dfrac{3}{5}\right)$

   (e) $a = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{5}\right)^2$ e $b = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}\right)$

   (f) $a = \left(\dfrac{1}{3} + 1\right)^2$ e $b = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}\right) : \dfrac{4}{5}$

6. Escreva a forma decimal de representar as seguintes potências:

   (a) 2^{-3}

   (b) 10^{-2}

   (c) 4^{-1}

   (d) $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{5}\right)^3$

7. Efetue

   (a) $\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{a^2c}{b}\right)^3$

   (b) $\left(\dfrac{2a^2b}{c^3} - \dfrac{a^2}{b^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{a^2c}{b} - \dfrac{c^2}{a^3b^2}\right)^3$

   (c) $\dfrac{\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3}$

   (d) $\dfrac{\left(\frac{3x^2y}{x^3y^2}\right)^{-2}}{\left(\frac{3x^2y^2}{x^3b^{-2}}\right)^3}$

   (e) $\left(\dfrac{2a^2b}{c^3} - \dfrac{c^5b}{a^2}\right)^2 \cdot \dfrac{a^2}{b^2}$

   (f) $\dfrac{\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\frac{3x^2y}{x^3y^2}\right)^{-2}}$

   (g) $\left(\dfrac{2a^2b}{c^3} + \left(\dfrac{a^2c}{b}\right)^3\right)^2 : \left(\dfrac{a^2c}{b} - \dfrac{c^2}{a^3b^2}\right)^2$

   (h) $\dfrac{\left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3}{\left(\frac{3x^2y^2}{x^3b^{-2}}\right)^3}$

   (i) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$

   (j) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

   (k) $\left(\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x-y)}\right)^2$

   (l) $\dfrac{(x^{-1} + y^{-1})^2}{(x+y)^{-1}}$

   (m) $\left[\left(\dfrac{a-1}{b}\right)^{-1}\right]^{-2}$

8. Dado $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{-2}{3}$, $c = \frac{-1}{3^2}$,$x = \frac{-3}{7}$, $y = \frac{5}{7}$. Calcule o valor numérico de cada item do exercício 7

Capítulo 4

Radiciação

Uma questão natural é saber quanto vale 8^2 pela extensão da linguagem.

Em outras situações é importante determinar quando for dado um número se existe um outro número que multiplicado por si mesmo uma certa quantidade de vezes resulta no primeiro. Por exemplo, para o número 64 existe algum número que multiplado por si mesmo gera o 64.

Pensando um pouco temos a igualdade $64 = 8 \cdot 8 = 8^2$.

Exemplos

1. $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$

2. $121 = 11 \cdot 11 = 11^2$

3. $81 = 9 \cdot 9 = 9^2$

4. $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

É a operação de Radiciação que vai responder essas questões.

4.1 Radiciação

A radiciação é a operação inversa da potenciação.

$$\sqrt[n]{a} = b \tag{4.1}$$

n é o radical ou índice

a é o radicando

b é a raiz

$\sqrt{}$ é o símbolo da operação

De modo geral podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a; \text{ com as restrições iniciais } n \in N \text{e } n > 1 \tag{4.2}$$

Exemplos

1. $\sqrt[3]{8} = 2 \leftrightarrow 2^3 = 8$

2. $\sqrt[4]{81} = 3 \leftrightarrow 3^4 = 81$

3. $\sqrt[3]{64} = 4 \leftrightarrow 4^3 = 64$

4.2 Propriedades Operatórias da Radiciação

As seguintes propriedades podem ser utilizadas para efetuação de cálculos:

$$\begin{array}{lll} \text{R1} & \sqrt[n]{ab} & = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \\ \text{R2} & \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} & = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ \text{R3} & \sqrt[n]{a^m} & = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \\ \text{R4} & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} & = \sqrt[n \cdot m]{a} \\ \text{R5} & a^{-\frac{m}{n}} & = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{array} \tag{4.3}$$

Exemplos

1. $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} =$

2. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}} =$

3. $\sqrt[3]{2^6} = (\sqrt[3]{2})^6 = 2^{\frac{6}{3}} =$

4. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} =$

4.3 Propriedades Fundamentais

Algumas propriedades fundamentais de radiciação são:

$\sqrt[n]{0} = 0$: caracteriza a multiplicação de zero por si mesmo, que resulta sempre no próprio zero.

$\sqrt[n]{1} = 1$: implica no mesmo caso anterior, já que a multiplicação de 1 n vezes será sempre igual a 1.

$\sqrt[1]{a} = a$: como o número "aparece" só uma vez na multiplicação, permanece ele mesmo.

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$: caso o expoente seja colocado em forma fracionária, teríamos a fração n:n, que é igual a 1.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$: sempre que há uma raiz há possibilidade de transformá-la em um expoente fracionário e vice-versa.

4.4 Forma fracionária da potenciação

A forma fracionária da potenciação corresponde na prática a um radiciação.

Para calcular $\sqrt{2^9} = 2^{\frac{9}{2}}$

Escrever o radical na forma de expoente fracionário não resolve o problema, pois nove não é divisível por 2.

Assim decomporemos o número 9 da seguinte forma: $9 = 8 + 1$, pois 8 é divisível por 2 que é o índice da raiz.

Assim teremos: $\sqrt{2^9} = 2^{\frac{8+1}{2}} = 2^{\frac{8}{2}+\frac{1}{2}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 16\sqrt{2}$

Para $\sqrt[3]{x^{14}} = x^{\frac{14}{3}} = x^{\frac{12+2}{3}} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^4\sqrt[3]{x^2}$ pois 12 é divisível por 3 (índice da raiz).

É importante lembrar que esta propriedade também é muito usada no sentido contrário ou seja (o denominador "n" do expoente fracionário é o índice do radical).

Exemplos

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

$5^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3$

4.5 Adição e Subtração com radicais

Quando temos radicais semelhantes em uma adição algébrica, podemos reduzi-los a um único radical somando-se os fatores externos desses radicais. Podemos dizer que estamos colocando em evidência os radicais que apareceram em todos os termos da soma.

Exemplos

1. $\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} = (1 + 4 + 2 + \sqrt{2})\sqrt{3} = (9 + \sqrt{2})\sqrt{3}$
2. $2\sqrt[5]{2} + 3\sqrt[5]{2} - 7\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{2} = (2 + 3 - 7 + 1)\sqrt[5]{2} = -1\sqrt[5]{2}$
3. $2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{343} - 5\sqrt{27}$

4.5.1 Multiplicação

Temos 4 casos básicos para a multiplicação de radicais, a seguir veremos cada um:

1. Radicais têm raízes exatas.

   Basta extrair a raiz e multiplicar os resultados:

   Exemplos

   (a) $\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{4} = 9 \cdot 3 \cdot 4 =$

   (b) $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^6} \cdot \sqrt[4]{x^8} = x \cdot (x-1)^2 \cdot x^2 =$

2. Radicais têm o mesmo índice.

   Devemos conservar o índice e multiplicar os radicandos, simplificando sempre que possível o resultado obtido.

   Exemplos

   (a) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{81 \cdot 27 \cdot 4} =$

   (b) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{(x-1)^6} \cdot \sqrt[5]{x^8} = \sqrt[5]{x^2 \cdot (x-1)^6 \cdot x^8} =$

3. Radicais têm índices diferentes

   O caminho mais fácil é transformar os radicais em potências fracionárias. Logo em seguida, transformar os expoentes fracionários em frações equivalentes (com mesmo denominador).

   Exemplos

(a) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 3^{\frac{4}{5}} \cdot 4^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{48}{60}} \cdot 4^{\frac{45}{60}} \cdot 2^{\frac{50}{60}} =$

(b) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^6} \cdot \sqrt[7]{x^8} = x^{\frac{2}{5}} \cdot (x-1)^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{7}{8}} =$

4. Utilizando a propriedade distributiva.

   Exemplo:

   (a) $\sqrt[5]{81} \cdot (\sqrt[4]{27} + \sqrt[3]{4}) = \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[4]{27} + \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[3]{4}) =$

   (b) $\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{(x-1)^6} + \sqrt[7]{x^8}) = \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^6} + \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[7]{x^8} =$

4.5.2 Divisão

A divisão de radicais tem 3 casos básicos, a seguir veremos cada um deles:

1. Os radicais têm raízes exatas

   Exemplo:

   (a) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[3]{27} = \dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{27}} =$

   (b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^8}} = \dfrac{x}{x^2} =$

2. Radicais têm o mesmo índice.

   Devemos conservar o índice e dividir os radicandos

   Exemplos:

   (a) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{27}} =$

   (b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^6}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^2}{(x-1)^6}}$

3. Radicais com índices diferentes. O caminho mais fácil é transformar os radicais em potências fracionárias, efetuar as operações de potências de mesma base e voltar para a forma de radical .

   Exemplos:

   (a) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{81^{\frac{1}{2}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(3^4)^{\frac{1}{2}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{4}{2}}}{3^{\frac{3}{3}}} = \dfrac{3^2}{3} =$

   (b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^6}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{5}{6}}}$

4.6 Exercícios

1. Calcule

   (a) $\sqrt{36} =$

   (b) $\sqrt{121} =$

   (c) $\sqrt{269} =$

   (d) $\sqrt{625} =$

   (e) $\sqrt[3]{125} =$

   (f) $\sqrt[3]{243} =$

   (g) $\sqrt[5]{1} =$

   (h) $\sqrt[6]{0} =$

   (i) $\sqrt[3]{-125} =$

   (j) $\sqrt[7]{-1} =$

   (k) $\sqrt[5]{-32} =$

2. Fatore e escreva na forma de potência com expoente fracionário:

   (a) $\sqrt[3]{32} =$

   (b) $\sqrt[3]{25} =$

   (c) $\sqrt[4]{27} =$

   (d) $\sqrt[4]{125} =$

   (e) $\sqrt[7]{8} =$

   (f) $\sqrt[7]{81} =$

   (g) $\sqrt[8]{512} =$

   (h) $\sqrt[3]{4116} =$

3. Calcule a raiz indicada:

   (a) $\sqrt{4a^2} =$

   (b) $\sqrt{36a^2b^6} =$

   (c) $\sqrt{\frac{4}{9}a^8b^4} =$

   (d) $\sqrt{\frac{a^24}{100}} =$

   (e) $\sqrt{\frac{16a^{10}}{25}} =$

   (f) $\sqrt{\frac{1}{625}} =$

   (g) $\sqrt{\frac{16a^4}{49b^2c^6}} =$

   (h) $\sqrt[3]{a^3b^6} =$

   (i) $\sqrt{\sqrt[5]{16^2}}\sqrt[5]{(33-1)^6} =$

   (j) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2}}\sqrt[5]{(x-1)^6} =$

4. De o valor das expressões na forma fracionária:

   (a) $\sqrt{\frac{1}{100}} =$

   (b) $-\sqrt{\frac{1}{16}} =$

   (c) $\sqrt{\frac{4}{9}} =$

   (d) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{81}{16}} =$

   (e) $1+\sqrt{\frac{25}{16}} =$

   (f) $\frac{\sqrt{49}}{3}-\sqrt{\frac{81}{16}} =$

(g) $\dfrac{\frac{\sqrt{49}}{3}}{\frac{\sqrt[4]{81}}{3} - \sqrt{\frac{81}{16}}} =$

(h) $\sqrt[2]{1 + \sqrt{\dfrac{25}{16}}} - \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{27}}{3} - \sqrt{\dfrac{125}{81}}} =$

5. Calcule os valores das seguintes expressões:

(a) $\sqrt{81}$

(b) $\sqrt[3]{125}$

(c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

(d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

(e) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{216}}$

(f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

(g) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{81^2}}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$

(h) $\frac{\sqrt[6]{6^4} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{6}}$

(i) $\sqrt[1543]{1}$

(j) $\sqrt[22]{-1}$

(k) $\sqrt[271]{-1}$

(l) $\sqrt[3]{-16 \cdot \sqrt{64}}$

(m) $\sqrt[5]{179^5} + \sqrt[3]{-189^3} - \sqrt[7]{(-10)^7}$

(n) $\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3}} - 4$

(o) $\sqrt[142]{0}$

(p) $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2 \cdot (2+\sqrt{4})}}}{\sqrt{3}}$

(q) $\sqrt{(-3)^2}$

(r) $\sqrt[4]{(-4)^4}$

(s) $\sqrt[3]{(-5)^3} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^3$

6. Simplifique

(a) $12\sqrt{10} - \sqrt{10} + 8\sqrt{10}$

(b) $6\sqrt{12} - 4\sqrt{12} - 8\sqrt{12}$

(c) $-4\sqrt[3]{11} + 5\sqrt[3]{11} - 11\sqrt[3]{11}$

(d) $-\sqrt[4]{81} + 23\sqrt[4]{81} - 11\sqrt[4]{81}$

(e) $-4\sqrt[3]{79} \cdot (5\sqrt[3]{79} - 11\sqrt[3]{79})$

(f) $\sqrt{6} \cdot (\sqrt{10} - 8\sqrt{10})$

(g) $(2\sqrt{11} - 3\sqrt{11}) \cdot (\sqrt{10} - 8\sqrt{10})$

(h) $\dfrac{\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{-5\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}$

(i) $-4\sqrt[3]{79} \cdot (5\sqrt[3]{79} - 11\sqrt[3]{79})$

(j) $\dfrac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{11} - \frac{5}{2}\sqrt[3]{11} + 1\sqrt[3]{11}}{\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}\left(1 - \frac{7}{4}\right)^2 + \sqrt[4]{81} \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\sqrt[4]{81}\right)^2}$

7. Calcule

(a) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2$

(b) $\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1}$

(c) $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

(d) $\left(\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1} + 1\right)^3$

(e) $\left(\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{2}{3}} + \dfrac{3}{4}\right)^3$

(f) $\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)^{\left(3 + \dfrac{2}{5}\right)}$

Capítulo 5

Produtos Notáveis

5.1 Operações com expressões algébricas

Devemos fazer a redução de termos semelhantes, por exemplo:

$x + x\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})x$

$2x^2 - 3x + 5 + 3x^2 - x - 7 = (2 + 3)x^2 + (-3 - 1)x + (5 - 7) = 5x^2 - 4x - 2$

Verifique que somamos os termos semelhantes, com , x^2 com x^2, x com x e assim por diante.

5.2 Multiplicação ou Divisão de expressões algébricas

Devemos utilizar as propriedades de potenciação, por exemplo:

$x \cdot x = x^2$ ou $2x^2 \cdot 3x^4 = 6x^6$

Os produtos notáveis são expressões que se destacam por aparecer repetidamente

A maior dificuldade dos alunos é distinguir a seguinte propriedade de potenciação $(ab)^2$ de $(a + b)^2$.

Por conseqüência, os alunos associam que $(a + b)^2$ com $a^2 + b^2$.

Exemplos numéricos mostram que a igualdade não é verdadeira.

$(3 + 7)^2 = 10^2 = 100$

$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58.$

Como $100 \neq 58 \rightarrow (3 + 7)^2 \neq 3^2 + 7^2$

5.3 Propriedade Distributiva

1. $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Devemos perceber que na propriedade distributiva todos os termos são multiplicados entre si e claro, não se esquecendo das regras de sinais. Para facilitar o desenvolvimento dessa propriedade surgem os produtos notáveis.

5.4 Produtos Notáveis

Produtos que são freqüentemente usados e para evitar a multiplicação de termo a termo, existem algumas fórmulas que convém serem memorizadas.

1. Quadrado da soma entre dois termos: $(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$

   A Representação geométrica é dada na figura 1

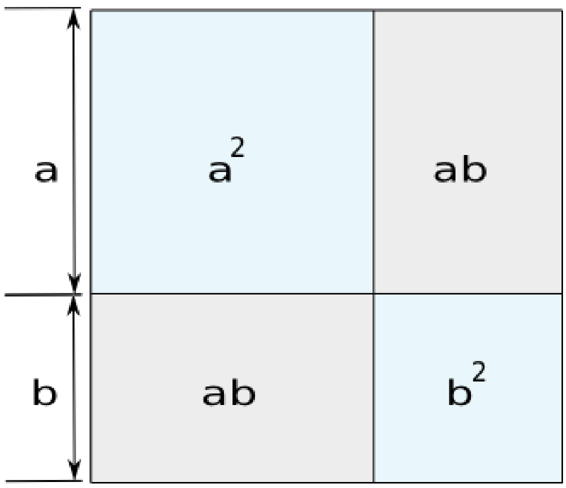
   

   Figura 5.1: Quadrado da soma

   Observe que a área desse quadrado de lado $a+b$ será $(a+b)^2$, ou podemos simplesmente somarmos as áreas menores e obteremos: $a^2 + a.b + a.b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Quadrado da diferença entre dois termos: $(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

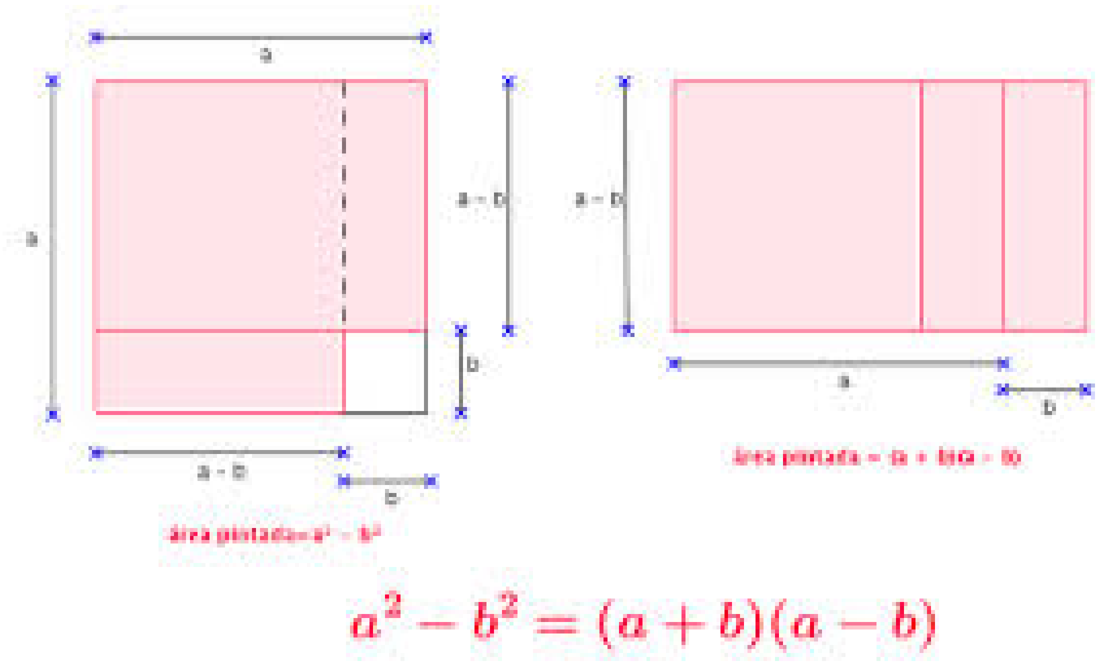


Figura 5.2: Quadrado da Diferença

A Representação geométrica é dada na figura 2:

3. Produto da soma pela diferença entre dois termos: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

   A Representação geométrica é dada na figura 3

4. Cubo de uma soma entre dois termos $(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + a.b + a.b + b^2)(a+b) = a^3b^0 + 3a^2 + 3ab^2 + a^0b^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$

   A Representação geométrica é dada na figura 4

5. Cubo da diferença entre dois termos

   Para determinar o cubo da diferença, basta substituir na identidade acima, b por -b, obtendo: $(a–b)^3 = a^3–3a^2b + 3ab^2–b3$

   $(a-b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a+b) = a^3b^0 - 3a^2 + 3ab^2 + a^0b^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 - b^3$

   A Representação geométrica é dada na figura 5

Exemplos

1. $(x+5)^2 = (x)^2 + 2(x)5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

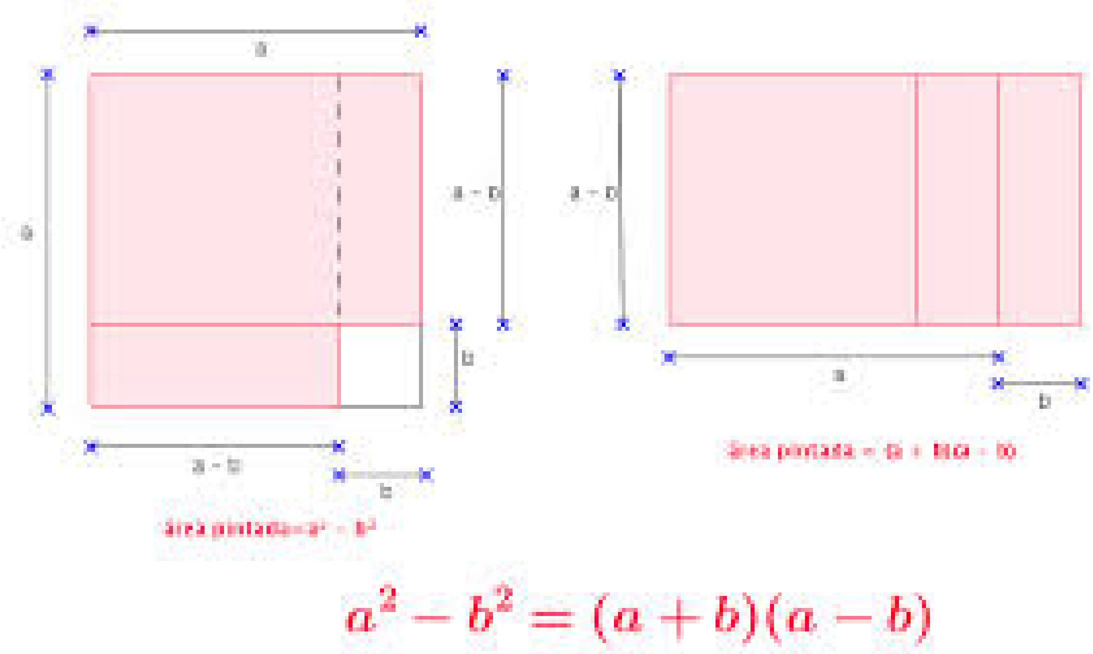


Figura 5.3: Produto soma pela diferença

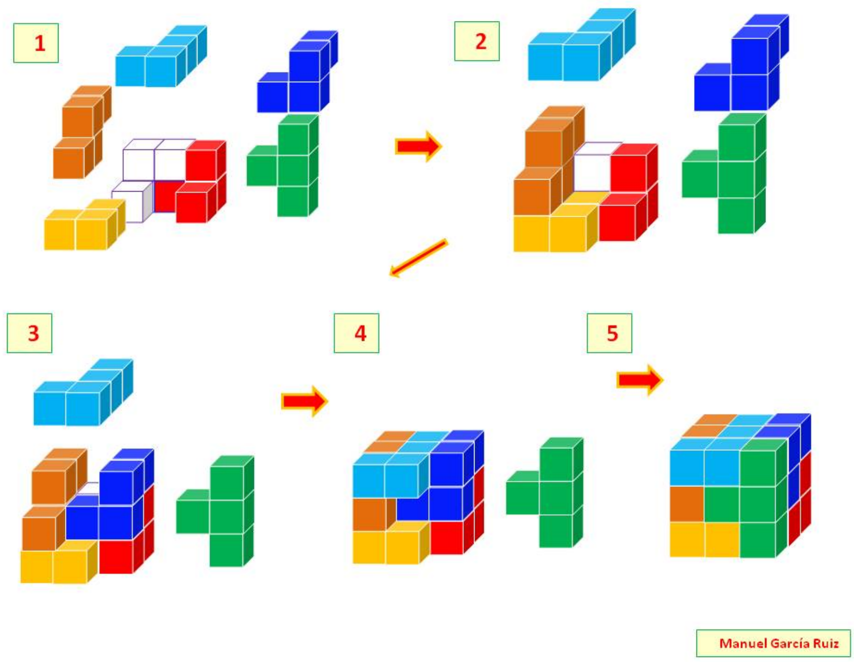


Figura 5.4: Cubo da soma

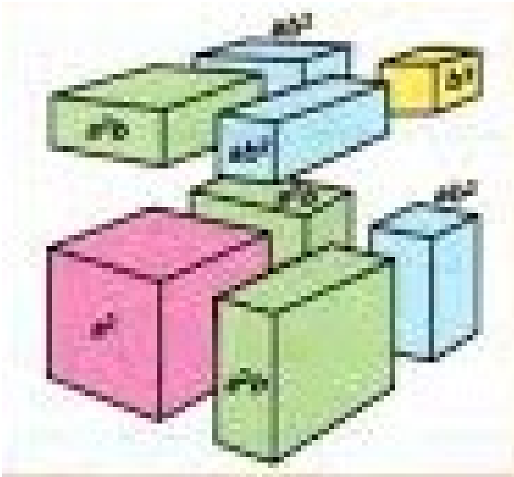


Figura 5.5: Cubo da Diferença

2. $(3x+y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

3. $(x+3)\cdot(x-3) = x^2 - 3^2 =$

4. $(3x+4y)\cdot(3x-4y) = (3x)^2 - (4y)^2 =$

5. $(1-3x)^3 = (1)^3 - 3(1)^2 3x + 3\cdot 1(3x)^2 - (3x)^3 = 1^3 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

5.5 Exercícios

1. Desenvolva

   (a) $(5+b)^3$

   (b) $(3a-b)^2$

   (c) $(3a^2+2)^3$

   (d) $((3a)^2+2)^3$

   (e) $(2b-3a)^3$

   (f) $(b-a)^3\cdot(b-a)^2$

   (g) $(b+a)^2\cdot(b-a)^2$

   (h) $(b^2-a^3)^3\cdot(b-a)^2$

   (i) $((b+1)^2-a^3)^2\cdot(b^2-3a^4)^2$

   (j) $\left(\left[\dfrac{1}{3a+1}\right]^2 - 1\right)^2$

   (k) $\left(\left[\dfrac{1}{a+b}\right]^2 - \left[\dfrac{2a+b}{a+b}\right]^2\right)^3$

   (l) $((3a+1)^2+2)^3$

   (m) $((3a)^2+(2+b)^3)^2$

   (n) $[(3a)^2-(2+b)^3]^3$

   (o) $\dfrac{[(2a)^2+(3+b)^3]^2}{[(3a)^2-(2+b)^3]^3} + 1$

   (p) $\left[\dfrac{[a^2-(1+b)^2]^2}{[2a^2-(a+b)^2]^3}\right] - 1$

   (q) $\left[\dfrac{a^2-(1+b)^2]^2}{2a^2-(a+b)^2]^3}\right] - \left[\dfrac{a^3-b^2}{[2a^3-b^2]^3}\right]$

   (r) $(a+b)^2 - (a+b)(a-b)$

2. Calcule a soma dos algarismo do resultado do produto $1.000.100 \times 999.900$

3. Sabendo que $6299816401^2 = a^2+b^2$, calcule o produto $6.299.816.397 \times 6.299.816.405$

4. Se $m + \dfrac{1}{m} = 7$, calcule o valor de $m^2 + \dfrac{1}{m^2}$

5. Se $k - \dfrac{3}{k} = 2$, calcule o valor de $k^3 - \dfrac{27}{k^3}$

Capítulo 6

Fatoração

O objetivo é transformar a expressão algébrica em fatores de uma multiplicação, ou seja, transformar em um produto. Para isso, temos alguns casos de fatoração.

6.1 Fator comum em evidência

O primeiro caso de fatoração é colocar em evidência o elemento que aparece em todos os termos, ou seja, o fator comum a todos os termos em evidência. Se verificarmos nada mais é do que a propriedade distributiva: $ax + ay = a \cdot (x + y)$ visto pelo outro sentido.

Exemplos

1. $8x - 12y + 4 = 4(2x – 3y + 1)$

2. $(a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$

3. $8xy^2 - 12x^3y + 4x^2y^2 = 4xy(2y^2 – x^2 + xy)$

6.2 Agrupamento dos termos semelhantes

Esta técnica de fatoração consiste em agrupar os termos semelhantes e colocar em evidência duas ou mais vezes.

Fatorar $xy + xz + ay + az$?

Verifique que não existe um único elemento comum a todos os termos, portanto vamos agrupar os termos que possuem partes iguais.

Neste caso, o xy e xz têm a letra x comum, portanto podemos colocar o x em evidência, $xy + xz = x(y + z)$.

Então até agora estamos assim: $xy + xz + ay + az = x(y + z) + ay + az$

Agora, percebam que o ay e o az têm parte comum: a letra a.

Então fazemos a mesma coisa: $ay + az = a(y + z)$.

Desta forma a expressão original $xy+xz+ay+az$ é igual a $x(y+z)+a(y+z)$.

Finalmente notamos que (y + z) é comum a x e a, então fazemos novamente a mesma coisa.

Colocamos $(y + z)$ em evidência. Veja: $(y + z)(x + a)$.

Observe que se fizermos esta multiplicação obteremos a expressão original

$$xy + xz + ay + az = (y + z)(x + a)$$

Exemplos

1. $ax + ay + x + y = a(x + y) + 1(x + y) = (x + y)(a + 1)$

2. $8x^2 - 5xy + 6x - 3y = 4x(2x - y) + 3(2x - y) = (4x + 3)(2x - y)$

3. $3y - 3y^2 - 2 + 2y = 3y(1 - y) - 2(1 - y) = (3y - 2)(1 - y)$

4. $$\begin{aligned} 4y - 16y^3 + 2x - 2xy^2 &= 4y(1 - y^2) + 2x(1 - y^2) \\ &= (4y - 2x)(1 - y^2) \\ &= 2(2y - x)(1 - y)(1 + y) \end{aligned}$$

6.3 Diferença de dois quadrados

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

Exemplos

1. $4a^2 - 9b^4 = (2a)^2 - (2b^2)^2 = (2a + 3b^2)(2a - 3b^2)$

2. $25a^2 - 16 = (25a)^2 - (4)^2 = (25a + 4)(25a - 4)$

3. $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

4. $\dfrac{x^2 - 4z^2}{xz - 2xz^3} = \dfrac{(x + 2z)(x - 2z)}{xz(1 - 2z^2)} = \dfrac{(x + 2z)(x - 2z)}{xz(1 - \sqrt{z})(1 + \sqrt{z})}$

6.4 Trinômio quadrado perfeito

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

ou

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Verifique que a expressão $x^2 + 2xy + y^2$ é o resultado do desenvolvimento do produto notável $(x + y)^2$.

Então, ao invés de escrevermos $x^2 + 2xy + y^2$ simplesmente escrevemos $(x + y)^2$.

Exemplos

1. $4a^2 + 12ab^2 + 9b^4 = (2a + 3b^2)^2$
2. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$
3. $9x^4 + 30x^2y^2 + 25y^8 = (3x^2 + 5x^4)^2$

6.5 Trinômio do segundo grau

Seja um trinômio do 2^o grau $ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0, b, c \in R$. São raízes da equação x_1 e x_2, tem se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} & \text{Soma das raízes} \\ \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} & \text{Produto das raízes} \end{cases} \tag{6.1}$$

6.6 Exercícios

1. Fatore:

   (a) $3x^2 - 5x + 2$

   (b) $25a^4 - 81b^2$

   (c) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

   (d) $4y^2 + 6y - 4$

   (e) $x^2 - xy + xz - yz$

   (f) $38x^3b^4c - 95a^2b^5c^3 + 57a^4b^2c^2$

   (g) $8x^2 - 4x^2y - 18xy^2 + 9y^3$

   (h) $180x^3y - 5xy^3$

   (i) $16x^2 - 8xy + y^2$

   (j) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16}$

   (k) $8x^3 - 24x^2y - 12x^2 + 18xy^2 + 36xy - 27y^2$

   (l) $4a^2 - 8ab + 4b^2$

   (m) $9z^2 + 6z + 1$

(n) $(a+b)x+2(a+b)$

(o) $(x+y)^2-(x-y)^2$

(p) $(a+b^2)^4-(a-b^2)^4$

2. (FAAP-SP) Calcule a expressão $\dfrac{2x^2-14x+24}{x^2-9}$

3. Dado $x=4+3^{-2}$, calcule expressão:

   (a) x^2+x^{-2}

   (b) $x+x^{-2}$

   (c) $(x+x^{-2})^3$

   (d) $\dfrac{x^2+1}{x^4-x^2}$

   (e) $\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^3}+1$

4. Dado $x=a+a^{-1}$, calcule expressão:

   (a) x^2+x^{-2}

   (b) $x+x^{-2}$

   (c) $\dfrac{x^2+1}{x^4-x^2}$

   (d) $\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^3}+1$

5. (PUC) Sendo $x^3+1=(x+1)(x^2+ax+b)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente:

   (a) -1 e -1

   (b) 0 e 0

   (c) 1 e -1

   (d) -1 e 1

   (e) 1 e 1

6. (FUVEST) A soma dos quadrados de dois números positivos é 4 e a soma dos inversos de seus quadrados é 1. Determine:

   (a) O produto dos dois números

   (b) A soma dos dois números

Capítulo 7

Equações de primeiro grau

7.1 Equação

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade.

A palavra equação tem o prefixo equa, que em latim quer dizer "igual".

Exemplos

$2x + 8 = 0$

$5x - 4 = 6x + 8$

$3a - b - c = 0$

Não são equações:

$4 + 8 = 7 + 5$(Não é uma sentença aberta)

$x - 5 < 3$ (Não é igualdade) (não é sentença aberta, nem igualdade)

A equação geral do primeiro grau:

$$ax + b = 0 \tag{7.1}$$

onde a e b são números conhecidos e $a \neq 0$, se resolve de maneira simples usando o Princípio da Balança, visto na figura 7.1

Subtraindo b dos dois lados, obtemos:

$ax + b - b = 0 - b$

$ax = b$

Dividindo agora por a (dos dois lados), temos:

$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$

$x = \frac{b}{a}$

Considerar a equação $2x - 8 = 3x - 10$

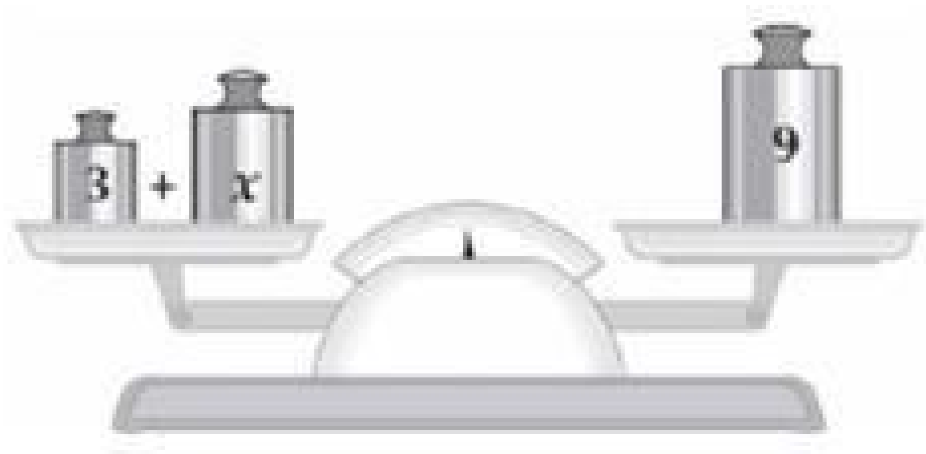


Figura 7.1: Princípio da Balança

A letra x é a incógnita da equação. A palavra incógnita significa "desconhecida".

Na equação acima a incógnita é x ; tudo que antecede o sinal da igualdade denomina-se 1o membro, e o que sucede, 2o membro.

$\underbrace{2x-8}_{1^o membro} = \underbrace{3x-10}_{2^o membro}$

Qualquer parcela, do 1o ou do 2o membro, é um termo da equação.

Equação do 1o grau na incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax = b$, sendo a e b números racionais, com a diferente de zero.

7.2 Exercícios

1. Resolva as equações a seguir:

   (a) $18x - 43 = 65$

   (b) $23x - 16 = 14 - 17x$

   (c) $10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$

   (d) $x(x + 4) + x(x + 2) = 2x + 12$

   (e) $(x - 5) \div 10 + (1 - 2x) \div 5 = (3 - x) \div 4$

   (f) $4x(x + 6) - x^2 = 5x^2$

2. Determine o número real "a"para que as expressões $\frac{(3a+6)}{8}$ e $\frac{(2a+10)}{6}$ sejam iguais.

3. Resolver as seguintes equações (na incógnita x):

(a) $5/x - 2 = 1/4(x \neq 0)$

(b) $3bx + 6bc = 7bx + 3bc$

4. Resolva as equações em $\mathcal{R}$ aplicando as técnicas resolutivas:

(a) $3 - 2(x + 3) = x - 18$

(b) $50 + (3x - 4) = 2(3x - 4) + 26$

(c) $7x - 2 = -4x + 5$

(d) $2x + 6 = x + 18$

(e) $5x - 3 = 2x + 9$

(f) $3(2x - 3) + 2(x + 1) = 3x + 18$

(g) $2x + 3(x - 5) = 4x + 9$

(h) $2(x + 1) - 3(2x - 5) = 6x - 3$

(i) $3x - 5 = x - 2$

(j) $3x - 5 = \frac{3}{5} - \frac{1}{4}$

(k) $\frac{3}{4}x - \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right)^2$

5. Resolva as equações em R aplicando as técnicas resolutivas:

(a) $3x + 5 = 2$

(b) $x - (2x - 1) = 23$

(c) $2x - (x - 1) = 5 - (x - 3)$

(d) $2x - 3 = 15$

(e) $4y = 30 - 18$

(f) $5z - 6 = z + 14$

(g) $m + 4 = 20$

6. O dobro de um número, aumentado de 15, é igual a 49. Qual é esse número?

7. A soma de um número co o seu triplo é igual a 48. Qual é esse número?

8. A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule essas idades, sabendo que juntos têm 60 anos?

9. Somando 5 anos ao dobro da idade de Sônia, obtemos 35 anos. Qual é a idade de Sônia?

10. O dobro de um número, diminuído de 4, é igual a esse número aumentado de 1. Qual é esse número?

11. O triplo de um número, mais dois, é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?

12. O quádruplo de um número, diminuído de 10, é igual ao dobro desse número, aumentado de 2. Qual é esse número?

13. O triplo de um número, menos 25, é igual ao próprio número, mais 55. Qual é esse número?

14. Num estacionamento há carros e motos, totalizando 78. O número de carros é igual a 5 vezes o de motos. Quantas motos há no estacionamento?

15. Um número somado com sua quarta parte é igual a 80. Qual é esse número?

Capítulo 8

Equações do 2^O Grau

É dita do 2º grau, toda equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.1}$$

em que $a \neq$, b e c são números reais. Se $b = 0$ ou $c = 0$, tem-se uma equação do 2º grau incompleta.

Gráficos Típicos

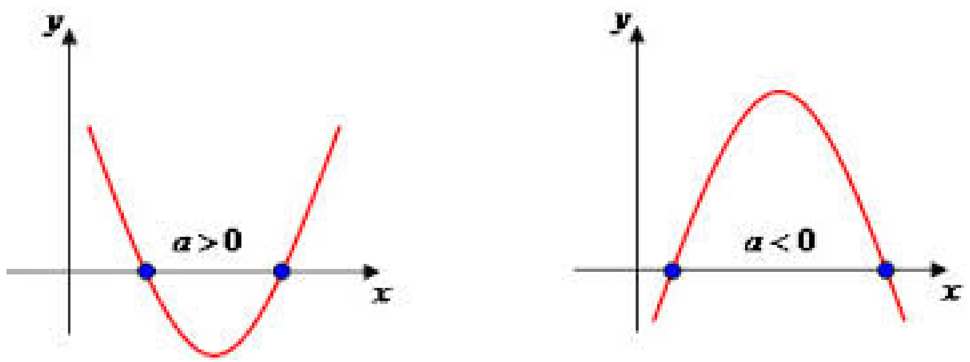


Figura 8.1: Concavidade da Parábola

Qualquer equação do 2o grau pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.2}$$

O discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$,estabelece o número de raízes:

1. $\Delta > 0$, duas raízes reais distintas

2. $\Delta = 0$, duas raízes reais iguais

3. $\Delta < 0$, não há raízes reais.

Sejam x_1 e x_2 raízes da equação, então $\frac{-b}{a}$ é a soma e $\frac{c}{a}$ o produto dessas raízes.

1. $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
2. $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

8.1 Exercícios

1. Calcule, usando produtos notáveis e fatoração:

   (a) $x_1^2 + x_2^2$

   (b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

2. Considerando o conjunto dos números reais, resolver as equações do 2º grau incompletas:

   (a) $4t^2 - 25 = 0$

   (b) $y^2 + 9 = 0$

   (c) $y^2 - 3x = 0$

3. Resolver, no conjunto dos números reais, a equação do 2º grau:

   (a) $x^2 - 25 = 0$

   (b) $3t^2 - 48 = 0$

   (c) $9y^2 - 1 = 0$

   (d) $2x^2 - 1 = 0$

   (e) $4y^2 + 16 = 0$

   (f) $x^2 - 7x = 0$

   (g) $3y^2 - 2y = 0$

   (h) $5t^2 + 2t = 0$

   (i) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

   (j) $t^2 - 6t + 9 = 0$

   (k) $2y^2 - 3y + 2 = 0$

   (l) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{30 + x}{10} = 0$

4. Determine k, sabendo que a soma das raízes da equação da $5x^2 + kx - 2 = 0$ é 3/5. Determine a outra raíz

5. Para que valores de m a equação $x^2 + 3x + m = 0$ não admite raízes reais?

6. Determine os valores de k para os quais a equação $y^2 - ky + 1 = 0$ admite raízes reais e iguais.

7. A equação $x^2 + 2x + m = 0$ admite duas raízes reais e distintas. Determine os valores de m.

8. A equação $kx^2 - 5x - 8 = 0$, na variável x, admite raízes reais para que valores reais de k?

9. Sem resolver as equações a seguir, calcule a soma e o produto de suas raízes. A partir da soma e do produto, determine mentalmente as raízes de cada equação.

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   (b) $x^2 - 9x + 20 = 0$

   (c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

   (d) $x^2 + 2x - 8 = 0$

10. Resolva, em R, os sistemas:

   (a) $\begin{cases} x + y & = 3 \\ x^2 + y^2 - 3x = 2 & \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 3x - y & = 2 \\ x^2 - 2y - x = -2 & \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2 & = x - y \\ x^2 + y^2 + y = 11 & \end{cases}$

Capítulo 9

Trigonometria

Um problema real onde pode ser percebido a aplicação da Trigonometria é dada na figura 9.

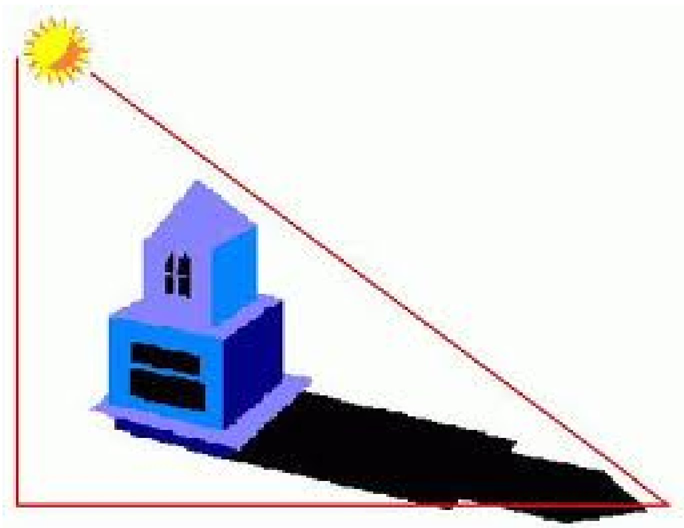


Figura 9.1: É possível calcular a altura do prédio usando o tamanho da sombra

9.1 Elementos do Triângulo Retângulo

Todo triângulo retângulo apresenta um ângulo reto e dois agudos. O triângulo ABC, figura 9.1, é retângulo em A.

As letras maiúsculas dos vértices denotam também os ângulos internos correspondentes e as letras minúsculas a,b,c denotam os lados opostos aos ângulos e suas respectivas medidas.

Logo $A = 90^o$ e $B + C = 90^o$

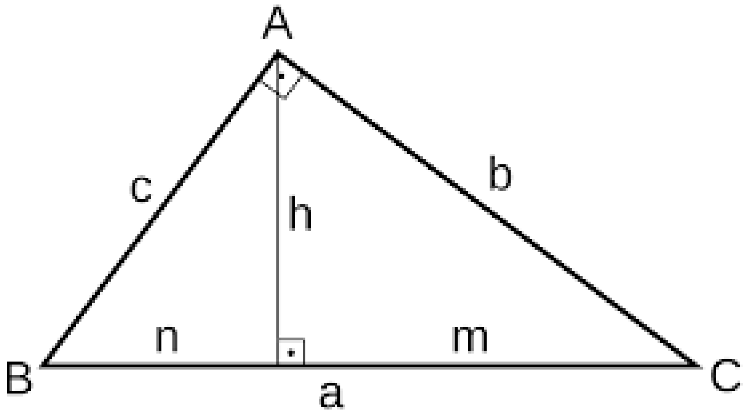


Figura 9.2: Elementos do Triângulo Retângulo

a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180^o **ou meio plano**

Os nomes cateto e hipotenusa são usados apenas nos triângulos retângulos. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os demais lados são catetos

9.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para as Definições apresentadas na figura 9.2, as funções trigonométricas são definidas por:

$$\begin{aligned} sen(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{Hipotenusa}} &&= \text{Função seno do ângulo} \\ cos(\alpha) &= \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{Hipotenusa}} &&= \text{Função cosseno do ângulo} \qquad (9.1) \\ tan(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo}\alpha} &&= \text{Função tangente do ângulo} \end{aligned}$$

9.3 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas ficam definidas no círculo trigonométrico por:

Os gráficos das funções tem o seguinte comportamento

9.4 Adição de arcos

Existem relações para a composição de arcos

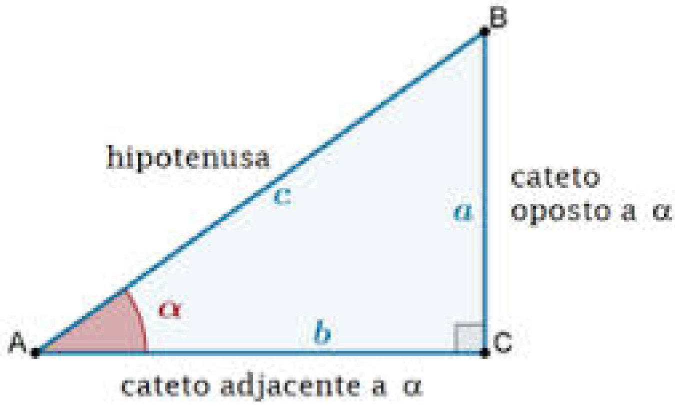


Figura 9.3: Definições do Triângulo Retângulo

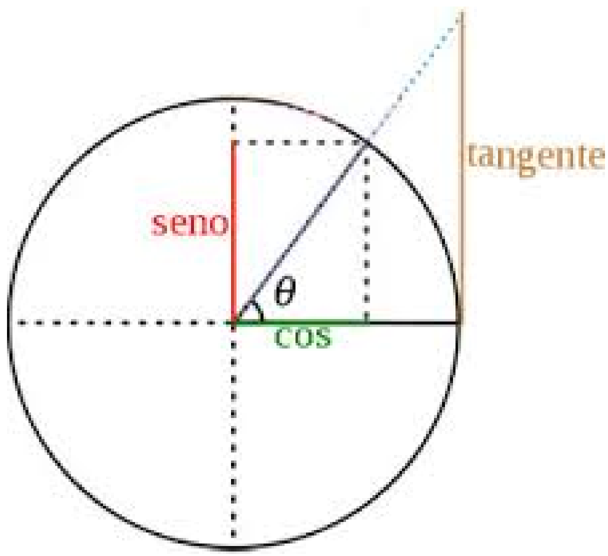


Figura 9.4: Círculo Trigonométrico

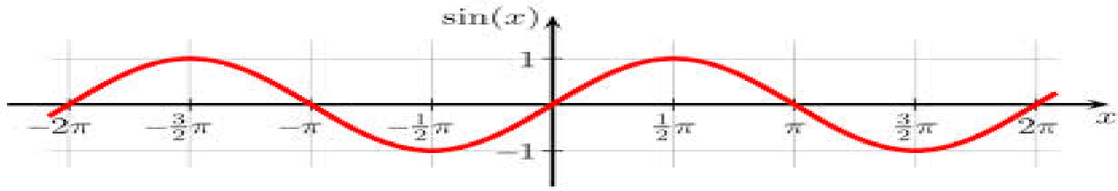


Figura 9.5: Gráfico da Função Seno

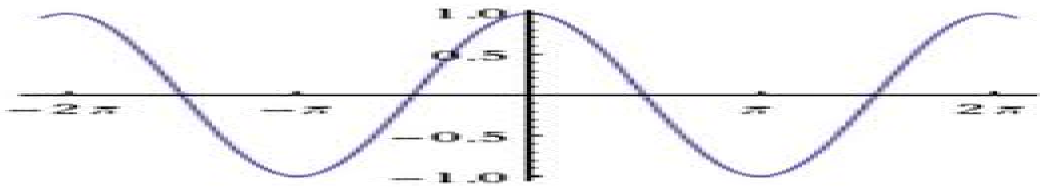


Figura 9.6: Gráfico da Função Cosseno

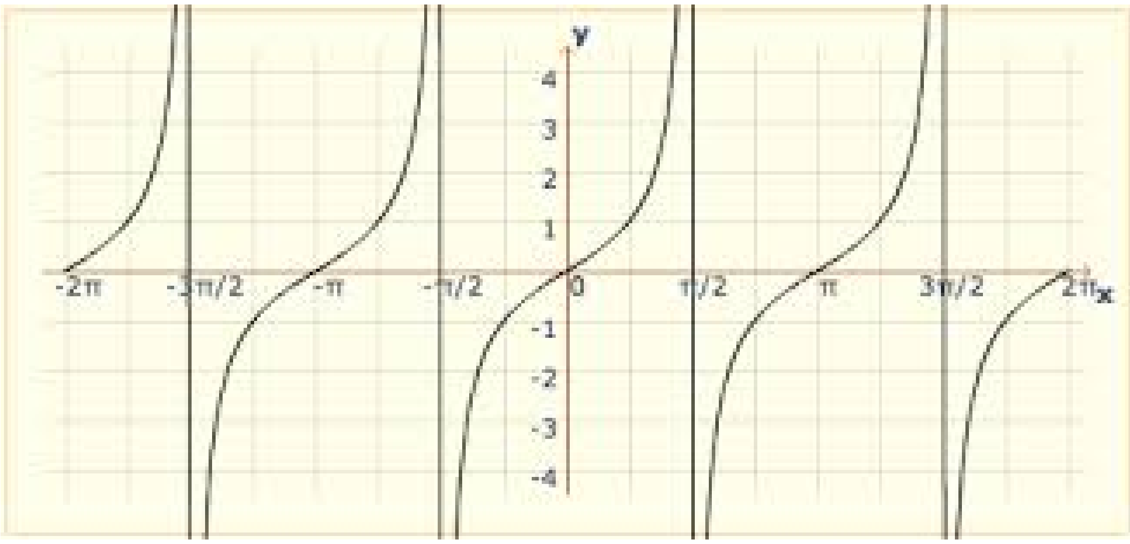


Figura 9.7: Gráfico da Função Tangente

$$\begin{aligned}
sen(\alpha \pm \beta) &= sin\alpha cos\beta \pm sin\beta cos\alpha \\
cos(\alpha \pm \beta) &= cos\alpha cos\beta \mp sen\beta sen\alpha \\
tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha tan\beta}
\end{aligned} \tag{9.2}$$

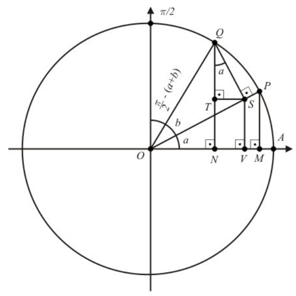


Figura 9.8: Composição de arcos

9.5 Exercícios

1. Calcule o valor de x

2. Calcule o valor de x

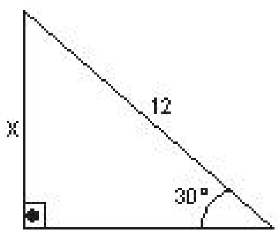


Figura 9.9: Problema 1

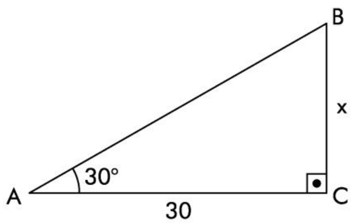


Figura 9.10: Problema 2

3. Calcule o valor de h

4. Calcule o valor de x e y

5. Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60.

6. Quando o ângulo de elevação do sol é de 25^o , a sombra de um edifício mede 8 m. Calcule a altura do edifício.

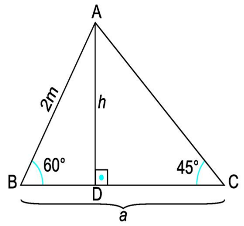


Figura 9.11: Problema 3

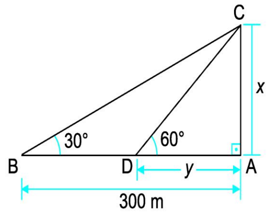


Figura 9.12: Problema 4

7. Quando o ângulo de elevação do sol é de 60^o, a sombra de um poste mede 15m. Calcule a altura da árvore

8. Uma escada encostada na parede tem seus pés afastados a 2,5 m formando um ângulo de 30^o com a vertical. Calcule a altura da escada.

9. Se $senx = 3/5$ e x é um ângulo do 2o quadrante, determine $cosx$.

10. Localize os ângulos no círculo trigonométrico e coloque os valores em ordem crescente : $sen70^o$, $sen160^o$, $sen250^o$, $sen300^o$

11. Resolva as equações

    (a) $senx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

    (b) $cosx = -1$

    (c) $cosx = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. Calcule k, tal que $senx = 1 + 4k$ e $cosx = 1 + 2k$

13. Se $senx + cosx = 1 + 3a$ e $senx - cosx = 1 - a$, calcule a.

14. Se $cosx = 2senx$, calcule $senx$.

15. Se $sen^2x - senx = 2cos^2x$, calcule $cosx$.

16. Dado que $senx \cdot cosx =$ a, calcule o valor de y $=(senx + cosx)^2$ em função dea

Capítulo 10

Relações Métricas no Triângulo retângulo

10.1 Teorema de Pitágoras

É muito antiga a relação $a^2 = b^2 + c^2$, dada na figura 10.1

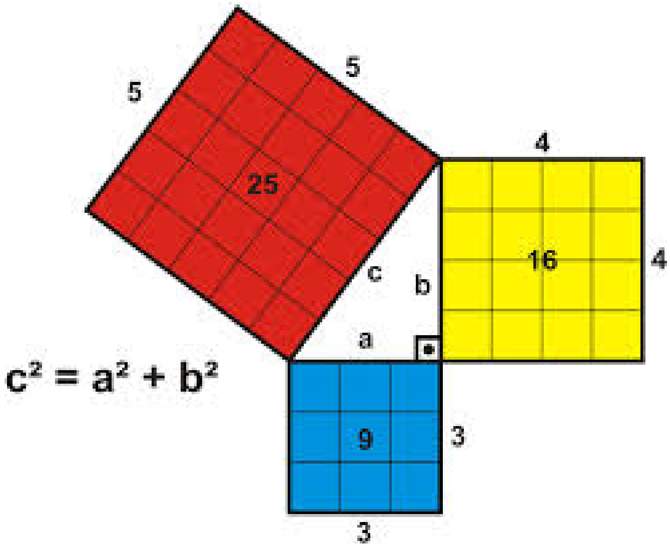


Figura 10.1: Pitágoras no Triângulo retângulo

10.2 Relações Métricas do Triângulo

Para o triângulo dado na figura 10.2:

a é a hipotenusa

b e c são os catetos

h é a altura relativa a hipotenusa

m é a projeção ortogonal de c

n é a projeção ortogonal de b

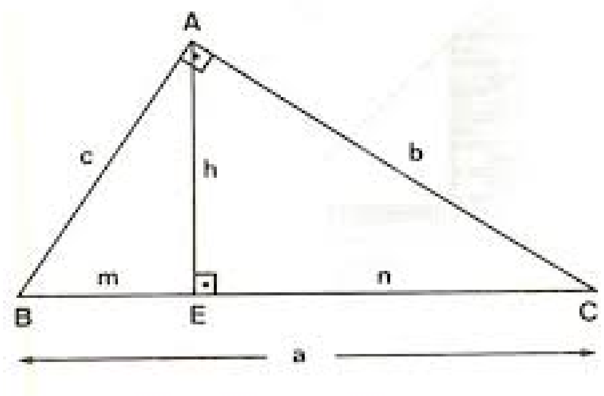


Figura 10.2: Relações Métricas do Triângulo

A semelhança de triângulos obtidas da figura 10.2 obtém se os seguintes resultados

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= a \cdot n \\ c^2 &= a \cdot m \\ h^2 &= n \cdot m \\ b \cdot c &= a \cdot h \end{aligned} \tag{10.1}$$

10.3 Exercícios

1. Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 8 cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.

2. A medida da altura relativa À hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.

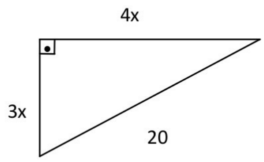
3. Determine a medida das projeções em um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 12 cm e um dos catetos 4 cm.

4. Em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7

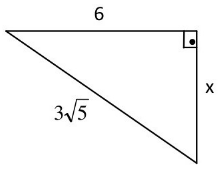
cm. Calcule o valor da hipotenusa desse triângulo

5. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são (x + 5) cm e (x + 1) cm e a hipotenusa (x + 9) cm. Determine o perímetro desse triângulo.

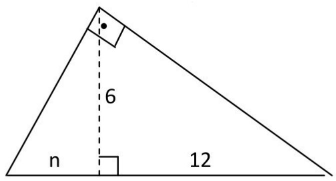
6. Utilizando as relações métricas, determine o valor pedido:



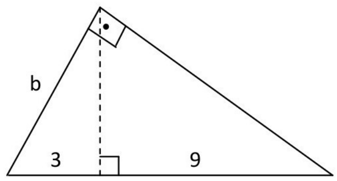
(a) Figura 10.3:



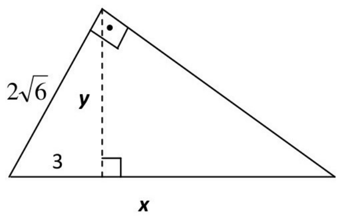
(b)



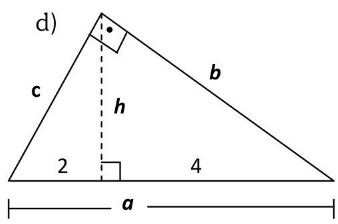
(c)



(d)



(e)



(f)